

# 確率数理工学4

## 期待値と特性関数

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ : 確率空間.

この空間上の r.v.  $X$  の 期待値 を定義する.

$F$ :  $X$  の分布関数.

$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (可測)

$F$  が絶対連続  $\vee$  離散なら  $\varphi(X)$  の期待値は  $\varphi, f$  が連続なら リーマン積分で良い.

$$E[\varphi(X)] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx & (\text{絶対連続, } f \text{ は p.d.f.}) \\ \sum_{x \in \mathbb{R}} \varphi(x) P(X=x) & (\text{離散}) \end{cases}$$

ここで、以下を注意.

- 任意の分布へ拡張する.
- 連続・離散といた区别を気にしない.
- $\mathbb{R}^d$  以外の空間上でも積分を定義する.

そこで、以下のように積分 (ルバーク積分) を定義する.

( $\varphi(X(\omega))$  も r.v. なので、ある r.v.  $X$  の期待値を定義すれば十分)

$E[X] = \int X(\omega) dP(\omega)$  の定義

$$\int X(\omega) P(d\omega), \int X dP, \int X dF \quad \text{等とも書く.}$$

( $dF = \frac{dF}{dx} \cdot dx = f(x) \cdot dx$  と解釈可也.  $\int X dF$  の記法も糸内得ておこう.)

注: 今我々がここで使うのは和  $(\sum_{n=1}^{\infty} \dots)$  を使うことだけである.

しかし、この和の極限を積分を定義するとは?

∴ 次ページ

(1)  $A \in \mathcal{F}$  に対し,  $A$  の 定義関数

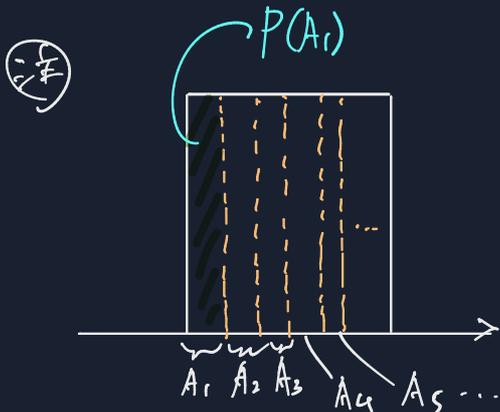
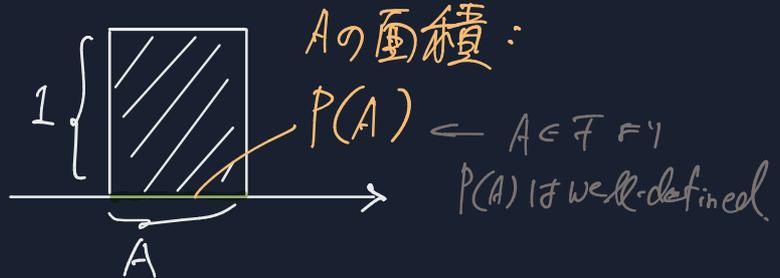
$$X(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega \in A) \\ 0 & (\omega \notin A) \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{l} A \in \mathcal{F} \text{ に対し,} \\ \{\omega \mid X(\omega) \leq x\} = \begin{cases} A & (x \geq 1) \\ \emptyset & (x < 1) \end{cases} \\ \therefore X \text{ は可測関数} \end{array} \right]$$

のとき,

$$E[X] := P(A)$$

とある.



$$X(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_k}(\omega)$$

$$\Rightarrow E[X] = P(A)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \quad (\text{σ-加算性})$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} E[\mathbb{1}_{A_k}]$$

$\Rightarrow X$  の表現のしぐたに  
よらなう

矛盾しない.

別の分解)  $X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_k} \quad \text{と } C \in \mathcal{F}$

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} E[\mathbb{1}_{A_k}] = \sum_{k=1}^{\infty} E[\mathbb{1}_{B_k}]$$

(2)  $X$  が 単関数 のとき、つまり

← これはまた可測 だ

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega) \quad (\text{有限和})$$

ただし、 $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $A_i \in \mathcal{F}$ ,  $(A_i)_{i=1}^n$  は互いに素な事象とするとする。

$$E[X] := \sum_{i=1}^n a_i P(A_i)$$

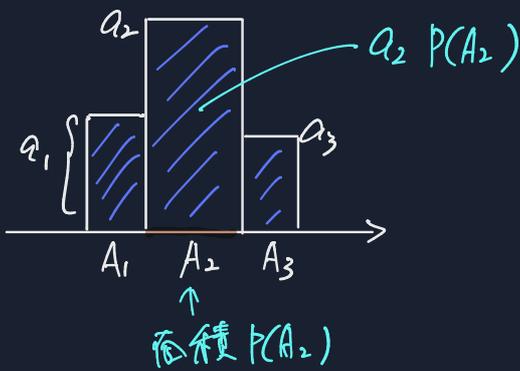
とある。

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{j=1}^m b_j \mathbb{1}_{B_j}$$

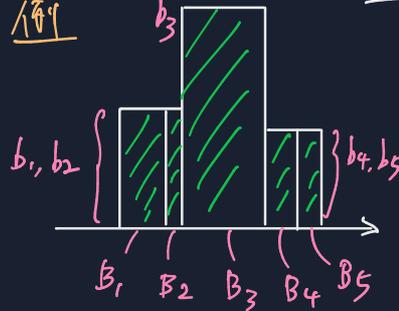
↗ あるいは  $E[X] = \sum_{j=1}^m b_j P(B_j)$

(1) の注のように、これは単関数の表現のしかたはいろいろ。

→ 有限加減性を使う。  
(演習問題)



例



$$X(\omega) = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega)$$

$$= \sum_{j=1}^5 b_j \mathbb{1}_{B_j}(\omega)$$

$$E[X] = \sum_{j=1}^5 b_j P(B_j) \text{ とおける。}$$



(4) 非負とは限らぬ  $X$  の時

$$X = X_+ - X_- \quad (X_+, X_- \text{ は } \mathbb{R}^+ \text{ (非負)})$$

と分解して.

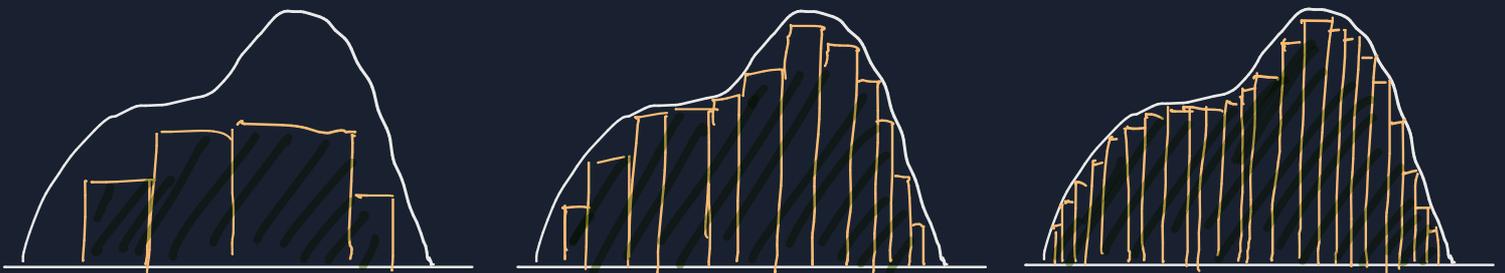
$$E[X] = E[X_+] - E[X_-]$$

とす.

$E[X_+], E[X_-] < \infty$  のとき、可積分とす ( $X \in L^1(P)$  と書く.)

\*: 積分の定義にあつて  $\Omega = \mathbb{R}^d$  という仮定は使わない. 任意の空間で定義できる.

イメージ



単関数で領域を下方に埋めてゆく

$X$  が単関数の列の極限で書けるかという事  
 $X$  の可測性を用いる.

# 積分が well-defined であることの証明

例. 単関数の列  $X_n, Y_n$  がともに  $X_n \nearrow X, Y_n \nearrow Y$  のとき.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[Y_n]$$

を示す. さもないと  $E[X]$  が単関数の取り方に依存し, well-defined にならない.

Lem

単関数  $X, Y$  に対し.

(読者問題)

$$E[\alpha X + \beta Y] = \alpha E[X] + \beta E[Y] \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

Lem

単関数列  $X_n$ , 単関数  $X$  に対し,  $X_n \nearrow X$  ならば

$$\lim_n E[X_n] = E[X]$$

証明

$$E[X] - E[X_n] = E[X - X_n] \neq 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[X - X_n] = 0 \text{ を示せばよい.}$$

言いかえれば, 非負の単関数列  $X_n$  が  $X_n \searrow 0$  のとき.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = 0$$

( $X_n \leftarrow X - X_n$   
と代入)

を示せばよい.

今  $X_1(\omega) \geq X_2(\omega) \geq \dots \geq 0$  かつ  $X_1$  が単関数なので.

$$K = \sup_{\omega \in \Omega} X_1(\omega)$$

とすれば  $K < \infty$  かつ  $\forall \omega \in \Omega, \forall n \geq 1, 0 \leq X_n(\omega) \leq K$  である.

$$\text{特に } 0 \leq X_n = X_n \mathbb{1}_{\{X_n > \varepsilon\}} + X_n \mathbb{1}_{\{X_n \leq \varepsilon\}} \quad (\varepsilon > 0 \text{ 任意})$$

$$\leq \underbrace{K \mathbb{1}_{\{X_n > \varepsilon\}}}_{\substack{\uparrow \\ X_n \leq K \text{ 故}}} + \underbrace{\varepsilon \mathbb{1}_{\{X_n \leq \varepsilon\}}}_{\substack{\leftarrow \\ \text{単関数}}} \quad (\text{二項不等式})$$

両辺期待値をとる.

$$0 \leq E[X_n] \leq K P(X_n > \varepsilon) + \varepsilon P(X_n \leq \varepsilon)$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{単関数}}}{\leq} K P(X_n > \varepsilon) + \varepsilon \underbrace{P(X_n \leq \varepsilon)}_{\leq 1}$$

$\varepsilon > 0$   $X_n \downarrow 0$  かつ  $A_n = \{X_n > \varepsilon\}$  とおくと  $\varepsilon < \varepsilon$ .

$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$  かつ  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$  である.

←  $\varepsilon > 0$  だけ

よって確率の単調性より、 $\leftarrow \varepsilon > 0$  の  $\varepsilon$ -0法性を使うことができる.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n > \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$$

よって:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E[X_n] \leq \varepsilon$$

( $\because$  前問より  $\varepsilon > 0$ )

$$E[X_n] \leq \varepsilon P(X_n > \varepsilon) + \varepsilon$$

$\varepsilon \downarrow 0$        $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$\varepsilon > 0$  は任意なので:

$$\lim E[X_n] = 0$$

である.

### $\lim E[X_n] = \lim E[Y_n]$ の証明

•  $\lim E[X_n] \leq \lim E[Y_n]$  を示せば、 $X_n$  と  $Y_n$  の対称性より  $\lim E[X_n] = \lim E[Y_n]$  を得る.

今  $n$  を固定して:

$$Z_{n,m}(\omega) = \min(X_n(\omega), Y_m(\omega))$$

とおく.  $Z_{n,m}$  は単関数である.

当然  $Z_{n,m} \leq Y_m$  (a.s.) である.

また、 $\lim_m Y_m(\omega) = X(\omega) \geq X_n(\omega)$  ( $\forall \omega$ ) かつ

$$Z_{n,m} \rightarrow X_n \quad (m \rightarrow \infty)$$

である. よって先の Lemma より:

$$E[X_n] = \lim_{m \rightarrow \infty} E[Z_{n,m}] \leq \lim_{m \rightarrow \infty} E[Y_m]$$

$n$  は任意なので  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] \leq \lim_{m \rightarrow \infty} E[Y_m]$

• リーマン積分との関係

Thm

$-\infty < a < b < \infty$  を用いた有界区間  $[a, b]$  を考える.

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  が リーマン積分可能なら、

ルベーグ積分可能である. //

Thm

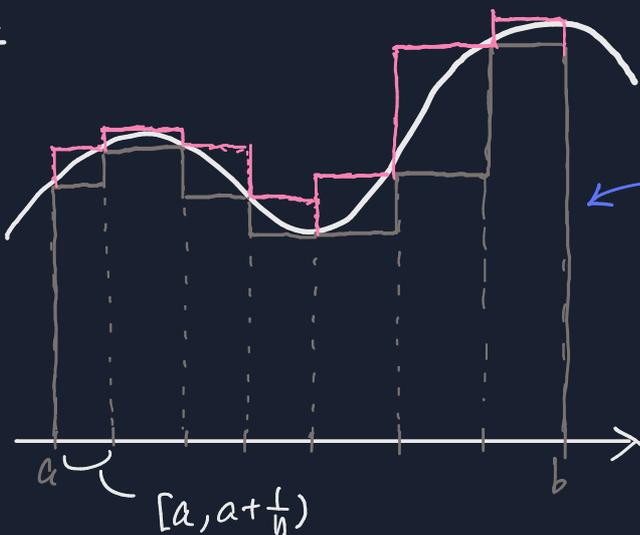
$f$  が  $[a, b]$  上 リーマン可積分  $\Leftrightarrow f$  は ほとんど至る所で連続

(ルベーグ測度の意味で  
測度0の集合をのぞいて) //

(注: これは  $\sigma$ -加法族として Borel 集合族ではなく、ルベーグ可測集合族を  
考えている.  $f$  が  $\mathcal{B}(\mathbb{R})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -可測なら、Borel 集合族でOK.)

• 2つ目の定理より、リーマン積分の意味での可積分性の時点で、  
ルベーグ測度の概念が自然に出て来る。「不連続点が可算個」では不十分.

直感



← これが、ルベーグ積分における  
単関数近似になっている.

• リーマン積分は  $[a, b]$  の有限分割から始めるので、 $A = \mathbb{Q} \cap [a, b]$  に対する  
 $f(x) = \mathbb{1}_A(x)$  のような関数は積分できない.

o Xの平均値 :  $\varphi(x) = x$ ,  $\mu \stackrel{\text{def}}{=} E[X]$

o Xのk次モーメント :  $\varphi(x) = x^k$ ,  $\mu_k \stackrel{\text{def}}{=} E[X^k]$  ←  $= 2 - 4 -$

o 平均値まわりのk次モーメント :  $\varphi(x) = (x - \mu)^k$ ,  $\nu_k \stackrel{\text{def}}{=} E[(X - \mu)^k]$

o 分散 :  $\varphi(x) = (x - \mu)^2$ ,  $\text{Var}[X] \stackrel{\text{def}}{=} E[(X - \mu)^2]$   
 $= E[X^2 - 2X\mu + \mu^2]$   
 $= E[X^2] - E[X]^2$   
 $(= \nu_2)$

### Cor (期待値の性質)

(1)  $Y = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$  に対し.

$$E[Y] = \sum_{k=1}^n a_k E[X_k] \quad (\text{線形性})$$

(2)  $X \leq Y$  (a.s.) なら ← a.s. は almost surely の意  
 $P(X \leq Y) = 1$  という意.

$$E[X] \leq E[Y] \quad (\text{単調性})$$

(3)  $X \geq 0$  (a.s.) のとき.

$$E[X] = \int_{[0, \infty)} (1 - F(x)) dx$$
$$= \int_{[0, \infty)} P(X > x) dx$$

-  $X \geq 0$  (a.s.)  $\alpha > 0$  に対し.

$$E[X^\alpha] = \alpha \int_{[0, \infty)} x^{\alpha-1} P(X > x) dx$$

$$(\because) E[X] = \int_{[0, \infty)} x dF(x)$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{1}[t < x] dt dF(x)$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{1}[t < x] dF(x) dt \quad (\because \text{Fubini})$$

$$= \int_0^\infty P(t < X) dt$$

(2) の場合同様)

非負被積分関数  
なら順序交換  
可能



(4) (単調収束定理)

$X_n \nearrow X$  a.s.  $0 \leq X_n \leq X$  (a.s.) なる.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = E[X]$$

( $\infty$  を除く.)

(証明は後々  $n \rightarrow \infty$  の演習問題で)

$X_n, X$  は単関数とは限らず一般の確率変数

(5) (Fatouの補題)

$X_n \geq 0$  (a.s.) なら.

$$E[\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E[X_n]$$

( $\infty$  を除く.)

(6) (優収束定理)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega) \quad (\forall \omega \in \Omega) \quad \text{ならば}$$

ある可積分な  $Z$  に対し  $|X_n| \leq Z$  (a.s.) が成り立つ時.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = E[X]$$

\* 優収束定理の反例.

// = 似たようなうまくない例

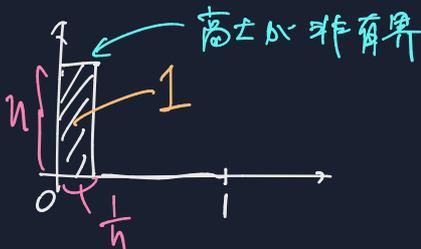
$\Omega = (0, 1], \mathcal{F} = \mathcal{B}((0, 1]), P$ : 一様分布.

$$X_n(\omega) = \begin{cases} n & (0 < \omega \leq \frac{1}{n}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$$X_n(\omega) \rightarrow X(\omega) = 0 \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

しかし  $E[X_n] = 1, E[X] = 0$  なる  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] \neq E[X]$ .

= かつ 必ず  $Z$  として  $|X_n| \leq Z$  と  $Z$  を作ることはできず.



$$(7) X, Y \text{ が独立 } (X \perp Y) \Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y]$$

( $X, Y$  が単関数ならば確かである)

## LEM (分散の性質)

(1)  $X$ : r.v. に對し  $Y = aX + b$  とおくと

$$\text{Var}[Y] = a^2 \text{Var}[X]$$

(2)  $X_1, X_2$ : r.v.,  $\mu_1 = E[X_1], \mu_2 = E[X_2]$  なら

$$\text{Var}[X_1 + X_2] = \text{Var}[X_1] + \text{Var}[X_2] + 2E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)]$$

(3) 互いに無相関な  $X_1, \dots, X_n$  に對し

$$\text{Var}[X_1 + \dots + X_n] = \text{Var}[X_1] + \text{Var}[X_2] + \dots + \text{Var}[X_n]$$

(2) の再示: 
$$\begin{aligned} \text{Var}[X_1 + X_2] &= E[(X_1 + X_2 - (\mu_1 + \mu_2))^2] \\ &= E[(X_1 - \mu_1)^2] + E[(X_2 - \mu_2)^2] \\ &\quad + 2E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] \end{aligned}$$

•  $E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)]$ : 共分散 (Covariance)

$\text{Cov}(X_1, X_2)$  と書く.

•  $R(X_1, X_2) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{Var}[X_1]\text{Var}[X_2]}}$ : 相関係数 (Correlation)  $(-1 \leq R(X_1, X_2) \leq 1)$   
2. 変数

$X_1 \perp X_2$  (独立)  $\Rightarrow E[X_1 X_2] = E[X_1]E[X_2]$  (独立)  
特に

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = 0 \quad (\text{逆は成り立たない})$$

$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{Var}[X_1] & \text{Cov}(X_1, X_2) \\ \text{Cov}(X_1, X_2) & \text{Var}[X_2] \end{pmatrix}$ : 分散共分散行列

\* 無相関 =  $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$

Ex. (= 二項分布の期待値と分散)

p.m.f.  $f(x) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{x=0}^n x \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \\ &= \sum_{x=1}^n x \frac{n!}{x!(n-x)!} \theta \cdot \theta^{x-1} (1-\theta)^{n-x} \\ &= n\theta \sum_{x=1}^n \binom{n-1}{x-1} \theta^{x-1} (1-\theta)^{n-x} \\ &= n\theta \underbrace{\sum_{x=0}^{n-1} \binom{n-1}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x-1}}_1 = n\theta \end{aligned}$$

$Var[X] = n\theta(1-\theta)$  ← 4.2.7 せふ.

一方  $X_i = \begin{cases} 1 & (\text{i} \text{ 個目のコイントスが表}) \\ 0 & (\text{i} \text{ 個目のコイントスが裏}) \end{cases}$

independent and identically distributed (i.i.d.)

$$\begin{pmatrix} P(X_i=1) = \theta \\ P(X_i=0) = 1-\theta \end{pmatrix}$$

$X = \sum_{i=1}^n X_i$  とおけば.

$X$  は二項分布に従う

$$E[X] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = \sum_{i=1}^n \theta = n\theta$$

$$\begin{aligned} Var[X] &= \sum_{i=1}^n Var[X_i] = \sum_{i=1}^n \theta \cdot (1-\theta)^2 + (1-\theta) \cdot \theta^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \theta(1-\theta) = n\theta(1-\theta) \end{aligned}$$

←  $X_i$  は独立

⇒ 上の計算と一致



# 単調収束定理の言正明 (参考)

積分の定義より

各  $X_n$  ごとに単調数列  $Y_m^{(n)}$  が存在して.

$$E[X_n] = \lim_{m \rightarrow \infty} E[Y_m^{(n)}], \quad Y_m^{(n)} \nearrow X_n$$

とある. このとき.

$$Z_m(\omega) := \max_{n \leq m} Y_m^{(n)}(\omega)$$

とすると,  $Z_m$  は単関数だから,  $Z_1 \leq Z_2 \leq Z_3 \leq \dots$  とある.  
この  $(Z_m)_m$  は  $X$  に漸近する単関数列であることを示す.

今,  $n \leq m$  において.

$$Y_m^{(n)} \leq \max_{n \leq m} Y_m^{(n)} = Z_m \leq \max_{n \leq m} X_n \leq X_m$$

$Y_m^{(n)} \leq X_n$  より  
 $X_m$  は単関数

より.

$$Y_m^{(n)} \leq Z_m \leq X_m \quad \dots \textcircled{1}$$

とある. 両辺  $m \rightarrow \infty$  に  $\lim$  をとると.

$$X_n = \lim_{m \rightarrow \infty} Y_m^{(n)} \leq \lim_m Z_m \leq \lim_m X_m = X$$

仮定

とあり. 左辺の  $n$  の極限  $\lim$  をとると.

$$X = \lim_n X_n \leq \lim_m Z_m \leq X$$

$E[X]$  の定義!

とあり.  $Z_m \nearrow X$  を示せば, より  $E[X] = \lim_{m \rightarrow \infty} E[Z_m]$  とある.

よって.  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = \lim_{m \rightarrow \infty} E[Z_m] (= E[X])$  を示せば十分.

①より.

$$\begin{aligned} E[X_n] &= \lim_m E[Y_m^{(n)}] \\ &\leq \lim_m E[Z_m] \quad (\because \textcircled{1}) \\ &\leq \lim_m E[X_m] \end{aligned}$$

$$\text{よって. } E[X_n] \leq \lim_m E[Z_m] (= E[X]) \leq \lim_n E[X_n]$$

$$\text{左辺の } \lim \text{ をとれば. } \lim_n E[X_n] \leq E[X] \leq \lim_n E[X_n]$$

$$\text{より. } \lim E[X_n] = E[X]$$



# 演習問題

(1)  $X = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{j=1}^m b_j \mathbb{1}_{B_j}$  (それぞれ単関数:  $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ ,  
 $A_i, B_j \in \mathcal{F}$ ,  $(A_i), (B_j)$  は互いに素)  
 のとき.  $C_{ij} = A_i \cap B_j \in \mathcal{C}$ .  
 $X$  を  $C_{ij}$  を用いた単関数表示せよ.

また,  $E[X] = \sum_{i=1}^n a_i P(A_i) = \sum_{j=1}^m b_j P(B_j)$  を示せ.

(2)  $X = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}$ ,  $Y = \sum_{j=1}^m b_j \mathbb{1}_{B_j}$  (それぞれ単関数)  
 のとき. 追加 ( $\bigcup_i A_i = \bigcup_j B_j = \Omega$  とする)

$X+Y$  を  $C_{ij} = A_i \cap B_j$  を用いた単関数として表せ.

その表示を用いて,

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

を示せ.

(3) 単調収束定理を用いて Fatou の補題を示せ.

ヒント:  $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \inf_{m \geq n} X_m(\omega) \right)$  とあることから,

$Y_n(\omega) = \inf_{m \geq n} X_m(\omega) \in \mathcal{C}$ ,  $(Y_n)_n$  に単調収束定理を適用せよ.

(4). (Fatou の補題別バージョン)

$|X_n| \leq Z$  かつ可積分な  $Z$  に対し成り立つこと.

$$E[\liminf_n X_n] \leq \liminf_n E[X_n]$$

$$E[\limsup_n X_n] \geq \limsup_n E[X_n]$$

が成り立つことを示せ.

ヒント:  $X_n + Z$  に Fatou を適用.

$-(X_n - Z)$  に Fatou を適用.

(4) (4) F11. 優収束定理を示せ.

優収束定理の証明

$$\begin{aligned}
 E[X] &= E[\liminf X_n] & (\because X = \liminf X_n \text{ F11}) \\
 &\equiv \liminf E[X_n] & (\because (4), \text{Fatouの補題}) \\
 &\equiv \limsup E[X_n] \\
 &\leq E[\limsup X_n] & (\because (4)) \\
 &= E[X] & (\because X = \limsup X_n \text{ F11})
 \end{aligned}$$

よって  $\lim E[X_n] = E[X]$  //

(5)  $X_n \geq 0$  (a.s.) のとき.

$$E\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n]$$

を示せ. (ヒント: 単調収束定理)

(6)  $A_n \in \mathcal{F}$  ( $n=1, 2, \dots$ ),  $(A_n)_n$  は互いに素.  $X$ : 可積分 のとき.

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[X \mathbf{1}_{A_n}] = E[X \mathbf{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}]$$

を示せ. (ヒント: 優収束定理)

和と積分の交換  
積分のσ-加法性

(7) 標準正規分布の密度関数  $f$  が  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$  を満たすことを示せ.

(8)  $X \sim$  標準正規分布 のとき.

$$\text{Var}[X] = 1$$

を示せ.



(9)  $(X_1, X_2)$  は  $(-1, 0), (1, 0), (0, 1)$  を頂点とする三角形上の一様分布に従うとする. このとき  $E[X_1 + X_2]$  を求めよ.

(10) 連続分布  $F$  に対し  $E[F(X)] = \int_{\mathbb{R}} F(x) dF(x) = \frac{1}{2}$  を示せ.